VISIT…

LANZAROTE
Caliente.COM

Сибирский журнал
индустриальной математики
Апрель–июнь, 2003. Том VI, № 2(14)

УДК 519.632

О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ ТРЕХМЕРНОЙ КОМПЛЕКСНОЙ ЗАДАЧИ РАСЧЕТА ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ И ТЕПЛОВЫХ ПОЛЕЙ

С. А. Соловьев

Исследуются вопросы итерационного решения системы линейных алгебраических уравнений, возникающих при конечнообъемной аппроксимации трехмерной краевой задачи для двух связанных дифференциальных уравнений эллиптического типа, описывающих распределение электрических и тепловых полей. Рассматриваются области, в которых коэффициенты электропроводности и теплопроводности являются разными функциями от искомой функции температуры. Исследуются алгоритмы неполной факторизации с предобуславливающими матрицами и ускорением итераций сопряженными градиентами. Рассматривается аппроксимация методом конечных объемов, обеспечивающая порядок сходимости $O(h^2)$ на равномерной сетке и $O(h)$ на неравномерной сетке. Проводится сравнительный анализ результатов численных экспериментов.

Введение. Рассматривается задача о математическом моделировании электрического и теплового полей, описываемых системой уравнений

$$\nabla \cdot \sigma(T)\nabla\varphi = 0, \quad \nabla \cdot \lambda(T)\nabla T = |\vec{\jmath}|^2/\sigma, \quad \vec{\jmath} = -\sigma(T)\nabla\varphi, \tag{1}$$

где φ и T — искомые функции электрического потенциала (далее потенциала) и температуры, σ и λ — коэффициенты электропроводности и теплопроводности, зависящие от температуры T, $\vec{\jmath}$ — вектор плотностей токов.

Области Ω_e для расчета потенциала и Ω_t для расчета температуры рассматриваются параллелепипедальными и в общем случае могут не совпадать. В объединении областей $\Omega = \Omega_e \cup \Omega_t$ строится общая расчетная сетка Ω^h.

Для уравнения потенциала граница расчетной области Γ_e состоит из частей Γ_{e1} и Γ_{e2}, на которых заданы краевые условия Дирихле (значения потенциала) и условия Неймана (плотность втекающих токов):

$$\varphi|_{\Gamma_{e1}} = \varphi_0(x,y,z), \quad \left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_{\Gamma_{e2}} = -\frac{j_n}{\sigma(T)}. \tag{2}$$

В случае если заданы краевые условия только типа Неймана, должно выполняться условие

$$\int\limits_{\Gamma_e} j_n\,ds = 0, \tag{3}$$

означающее отсутствие внутренних источников тока.

Для уравнения температуры граница расчетной области также состоит из частей Γ_{t1} и Γ_{t2}, на которых заданы краевые условия Дирихле (значения температуры) и условия Ньютона, характеризующие теплообмен с внешней средой:

$$T|_{\Gamma_{t1}} = T_0(x,y,z), \quad \frac{\partial T}{\partial n} + \alpha T = \beta|_{\Gamma_{t2}}, \tag{4}$$

© 2003 Соловьев С. А.

где α, β — коэффициенты, зависящие от параметров материала и температуры внешней среды. Задача (1)–(4) возникает при расчете энерготеплового баланса в алюминиевых электролизерах [1]. Численное решение этой задачи исследовалось многими авторами (см. например, [2] и цитируемые там работы).

В п. 1 показана конечнообъемная аппроксимация исходных дифференциальных уравнений; в п. 2 приводится описание предлагаемых итерационных методов; в п. 3 анализируются результаты экспериментов по решению методических задач.

Расчеты проводились с помощью развитой модификации описанной в [3] программы.

1. Конечнообъемная аппроксимация. Аппроксимацию уравнений системы (1) продемонстрируем на примере уравнения (2), которое запишем в виде

$$-\nabla \cdot \lambda(T^*)\nabla T = f, \quad f = \sigma(T^*)|\nabla\varphi^*|^2,$$

взяв T^* и φ^* как известные функции координат $T^* = T(x,y,z)$, $\varphi^* = \varphi(x,y,z)$.

Расчетная параллелепипедальная область Ω дискретизируется путем построения неравномерной в общем случае сетки Ω^h с координатными плоскостями

$$x_{i+1} = x_i + h_i^x, \quad y_{j+1} = y_j + h_j^y, \quad z_{k+1} = z_k + h_k^z,$$
$$i = 0,\dots,L-1, \quad j = 0,\dots,M-1, \quad k = 0,\dots,N-1,$$

такими, что параллелепипед $x_0 \le x \le x_L$, $y_0 \le y \le y_M$, $z_0 \le z \le z_N$ содержит область Ω, а границы раздела различных сред и внешние грани совпадают с координатным плоскостями.

Исходные дифференциальные уравнения интегрируются по конечным объемам

$$V_{i,j,k} = \{(x_i + x_{i-1})/2 \le x \le (x_i + x_{i+1})/2,$$
$$(y_j + y_{j-1})/2 \le y \le (y_j + y_{j+1})/2,\ (z_k + z_{k-1})/2 \le z \le (z_k + z_{k+1})/2\},$$
$$\overline{V}_{i,j,k} = \{x_{i-1} \le x \le x_{i+1},\ y_{j-1} \le y \le y_{j+1},\ z_{k-1} \le z \le z_{k+1}\}$$

в окрестности внутренних узлов сетки $(i,j,k) \in \Omega^h$. Получаем балансные соотношения

$$I_{i,j,k} \equiv -w \int\limits_{S_{i,j,k}} \lambda \frac{\partial T}{\partial n}\, ds - (1-w) \int\limits_{\overline{S}_{i,j,k}} \lambda \frac{\partial T}{\partial n}\, ds = \int\limits_{V_{i,j,k}} f\, dV + \int\limits_{\overline{V}_{i,j,k}} f\, dV,$$

где $S_{i,j,k}$ и $\overline{S}_{i,j,k}$ обозначают границы объемов $V_{i,j,k}$ и $\overline{V}_{i,j,k}$ соответственно, а $\dfrac{\partial}{\partial n}$ — производную по ее внешней нормали. Аппроксимируя эти отношения, взяв $w = 16/15$, приходим к симметричной системе семиточечных уравнений [4]:

$$- p3_{i-1,j,k}u_{i-1,j,k} - p4_{i,j-1}u_{i,j-1} - p6_{i,j,k-1}u_{i,j,k-1}$$
$$- p3_{i,j,k}u_{i+1,j,k} - p4_{i,j,k}u_{i,j+1,k} - p6_{i,j,k}u_{i,j,k+1} + p0_{i,j,k}u_{i,j,k} = f^h_{i,j,k},$$

$$p3_{i,j,k} = \frac{\lambda_{i+1/2,j+1/2,k+1/2}}{4h_i^x}\big(h_j^y + h_{j-1}^y\big)\big(h_k^z + h_{k-1}^z\big),$$

$$p4_{i,j,k} = \frac{\lambda_{i+1/2,j+1/2,k+1/2}}{4h_j^y}\big(h_i^x + h_{i-1}^x\big)\big(h_k^z + h_{k-1}^z\big),$$

$$p6_{i,j,k} = \frac{\lambda_{i+1/2,j+1/2,k+1/2}}{4h_k^z}\big(h_i^x + h_{i-1}^x\big)\big(h_j^y + h_{j-1}^y\big),$$

$$\lambda_{i+1/2,j+1/2,k+1/2} = \lambda(x_{i+1/2}, y_{j+1/2}, z_{k+1/2}),$$

$$p0_{i,j,k} = p3_{i-1,j,k} + p4_{i,j-1,k} + p6_{i,j,k-1} + p3_{i,j,k} + p4_{i,j,k} + p6_{i,j,k},$$

$$f^h_{i,j,k} = f0_{i-1,j-1,k-1} + f0_{i-1,j-1,k} + f0_{i-1,j,k-1} + f0_{i-1,j,k} + f0_{i,j-1,k-1} + f0_{i,j-1,k} + f0_{i,j,k-1} + f0_{i,j,k},$$

$$f0_{i,j,k} = \sigma\big(T^*_{i+1/2,j+1/2,k+1/2}\big)\big|\nabla\varphi^*_{i+1/2,j+1/2,k+1/2}\big|^2.$$

Если узел (i,j,k) находится на границе с условиями второго рода, то интегрирование проводится только по подобъемам $V^k_{i,j,k} \in V_{i,j,k}$, получаемым делением объема $V_{i,j,k}$ плоскостями $x = x_i$, $y = y_j$, $z = z_k$ на восемь частей и находящимся внутри расчетной области. При этом интегралы от потока по граничным площадкам вычисляются или точно, или с помощью простейших квадратурных формул. Краевые условия первого рода аппроксимируются в околограничных узлах точно. Величина $|\nabla\varphi^*|^2$ вычисляется в середине конечного объема $E_{i,j,k} = \{(x_i \le x_{i+1}), (y_j \le y_{j+1}), (z_k \le z_{k+1})\}$ с помощью простейших квадратурных формул по значениям φ^* в вершинах $E_{i,j,k}$. Конечный объем $E_{i,j,k}$ изображен на рис. 1. Значение $\sigma(T^*)$ вычисляется также в середине элементарного объема $E_{i,j,k}$ как функция от усредненного значения T^* по вершинам $E_{i,j,k}$:

$$T^*_{i+1/2,j+1/2,k+1/2} = \frac{1}{8}\big(T^*_{i,j,k} + T^*_{i,j,k+1} + T^*_{i,j+1,k} + T^*_{i,j+1,k+1} + T^*_{i+1,j,k} + T^*_{i+1,j,k+1} + T^*_{i+1,j+1,k} + T^*_{i+1,j+1,k+1}\big),$$

$$\begin{aligned}\big|\nabla\varphi^*_{i+1/2,j+1/2,k+1/2}\big|^2 = {}& \left(\frac{1}{4h^x_i}\right)^2 \big(\varphi^*_{i+1,j,k} - \varphi^*_{i,j,k} + \varphi^*_{i+1,j,k+1} - \varphi^*_{i,j,k+1} \\ &+ \varphi^*_{i+1,j+1,k} - \varphi^*_{i,j+1,k} + \varphi^*_{i+1,j+1,k+1} - \varphi^*_{i,j+1,k+1}\big)^2 \\ &+ \left(\frac{1}{4h^y_j}\right)^2 \big(\varphi^*_{i,j+1,k} - \varphi^*_{i,j,k} + \varphi^*_{i,j+1,k+1} - \varphi^*_{i,j,k+1} \\ &+ \varphi^*_{i+1,j+1,k} - \varphi^*_{i+1,j,k} + \varphi^*_{i+1,j+1,k+1} - \varphi^*_{i+1,j,k+1}\big)^2 \\ &+ \left(\frac{1}{4h^z_k}\right)^2 \big(\varphi^*_{i,j,k+1} - \varphi^*_{i,j,k} + \varphi^*_{i,j+1,k+1} - \varphi^*_{i,j+1,k} \\ &+ \varphi^*_{i+1,j,k+1} - \varphi^*_{i+1,j,k} + \varphi^*_{i+1,j+1,k+1} - \varphi^*_{i+1,j+1,k}\big)^2.\end{aligned}$$

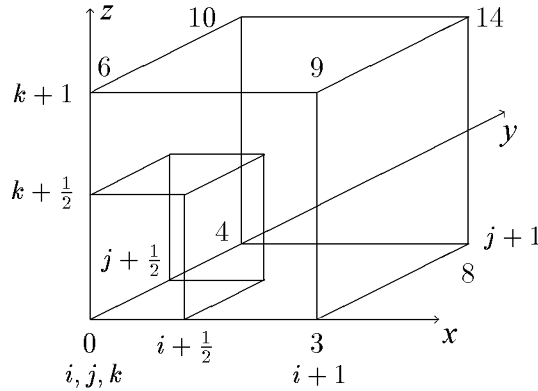


Рис 1. Локальная нумерация узлов в сеточном элементе

Рассматриваемая аппроксимация обеспечивает порядок сходимости $O(h^2)$ на равномерной сетке и $O(h)$ на неравномерной.

В результате учета граничных условий коэффициенты и правые части уравнения модифицируются, после чего приходим к алгебраической системе

$$A_t^h(T^*)T^h = f_t^h(T^*, \varphi^*), \tag{5}$$

где векторы $T^h = \{T_n,\ n = n(i,j,k)\}$, $f^h = \{f_n\}$ размерности N содержат компоненты, соответствующие только внутренним узлам сетки или узлам, лежащим на границе с условиями второго рода.

Аппроксимируя аналогично первое дифференциальное уравнение из (1), получаем алгебраическую систему

$$A_e^h(T^*)\varphi^h = f_e^h. \tag{6}$$

Далее индексы h будем опускать.

2. Итерационные алгоритмы. Итерационный алгоритм решения задачи (1)–(4) запишем в следующем виде:

$$\begin{gathered} A_e(T^{n-1})\varphi^n = f_e^n, \quad A_t(T^{n-1})\widehat{T}^n = f_t(T^{n-1}, \varphi^n), \\ T^n = \omega\widehat{T}^n + (1-\omega)T^{n-1}, \quad 0 < \omega \le 1, \quad \widehat{T}^{n,0} = T^{n-1}, \quad \widehat{\varphi}^{n,0} = \varphi^{n-1}. \end{gathered} \tag{7}$$

При выполнении этого алгоритма необходимо решить системы (5) и (6). Для их решения воспользуемся методом неполной факторизации с ускорением сопряженными градиентами [5]. Если матрицу системы представить в виде $A = D - L - L^t$, где D, L — диагональная и нижнетреугольная части матрицы A, то предобуславливающая матрица B выглядит следующим образом [5]:

$$B = (G-L)G^{-1}(G-L^t), \quad G = \gamma D - \frac{1}{\gamma}\,\mathrm{diag}(LD^{-1}L^t) - \theta S. \tag{8}$$

Здесь $0 < \theta \le 1$ и $\gamma \ge 1$ суть параметры компенсации и возмущения, G — диагональная матрица. При задании на всех гранях краевых условий типа Неймана необходимо выполнение условия $\gamma > 1$; обычно задаем $\gamma = 1,005$. Матрица S диагональная и удовлетворяет критерию строчных сумм $Se = \dfrac{1}{\gamma}LD^{-1}L^te$, где e — вектор, состоящий из единиц.

Поясним итерационный алгоритм (7).

Шаг 0. Задаем начальное приближение φ^0, T^0 и релаксационный параметр ω, $0 < \omega \le 1$.

Шаг 1. Вычисляем коэффициенты матрицы потенциалов $A_e(T^{n-1})$ и правую часть f_e^n.

Шаг 2. Используя вышеупомянутый метод неполной факторизации (взяв за начальное приближение потенциал с предыдущего шага φ^{n-1}), решаем уравнение $A_e(T^{n-1})\varphi^n = f_e^n$ и находим φ^n.

Шаг 3. Вычисляем коэффициенты матрицы теплопроводности $A_t(T^{n-1})$ и правую часть уравнения теплопроводности $f_t(T^{n-1}, \varphi^n)$.

Шаг 4. Аналогично шагу 2 решаем нелинейное уравнение $A_t(T^{n-1})\widehat{T}^n = f_t(T^{n-1}, \varphi^n)$ относительно неизвестного $\widehat{T}^n$.

Шаг 5. Вычисляем $T^n = \omega\widehat{T}^n + (1-\omega)T^{n-1}$.

Шаг 6. В сеточной норме C проверяется относительная ошибка между решением на текущем и предыдущем шагах:

$$\frac{\|\varphi^n - \varphi^{n-1}\|}{\|\varphi^n\|} < \varepsilon_e, \quad \frac{\|T^n - T^{n-1}\|}{\|T^n\|} < \varepsilon_e.$$

Если оба условия выполняются, то внешний итерационный процесс прерывается, а сеточные функции φ и T принимаем за решение задачи (1)–(4).

3. Результаты численных экспериментов. В приводимых ниже примерах проводятся численные эксперименты, которые далее будем называть тестами. Тесты делятся на две основные группы — аналитические и численные.

Под аналитическими тестами понимаются примеры, в которых известны аналитические решения. Для того, чтобы было возможным найти аналитическое решение, в уравнения системы (1) добавляются правые части f_e и f_T. В таких тестах проверяется отношение разницы между приближенным и аналитическим решениями в сеточной норме C:

$$\delta_\infty = \frac{||u_h - u||_\infty}{||u_h||}, \quad \|u||_\infty = \max_{i,j,k}\{|u_{i,j,k}|\}.$$

На основе этого легко проверяется сходимость метода при уменьшения шага сетки ($h \to 0$).

В численных тестах из-за сложной геометрии и физических параметров аналитическое решение неизвестно. Поэтому в них сравниваются ошибки, понимаемые как разница решений потенциала (температуры), полученных на текущей и предыдущей сетках (более грубой). На этом основании так же, как и в аналитических тестах, делаются выводы о сходимости метода. Вдобавок к этому на численных тестах проверяется правильность расчетов для различных геометрий и физических сред.

У большинства интересующих нас материалов теплопроводность слабо зависит от температуры, поэтому будем считать коэффициент теплопроводности λ равным константе в каждой среде.

Параметры электропроводности σ задаются как физические параметры для материалов, используемых в алюминиевых электролизерах [6]. На рис. 2 изображены графики зависимости этих параметров от температуры для алюминия, стали, графита и электролита. Электропроводности этих материалов различаются на порядки и отображаются на графиках с некоторыми коэффициентами, приведенными на этом же рисунке. Для получения истинных значений электропроводностей, используемых в примерах, необходимо домножить значения на графике на соответствующие коэффициенты.

Размерность задается в единицах СИ: $[T] = [\text{K}]$, $[\lambda] = [(\text{м} \cdot \text{K})^{-1}]$, $[\sigma] = [(\text{Ом} \cdot \text{м})^{-1}]$.

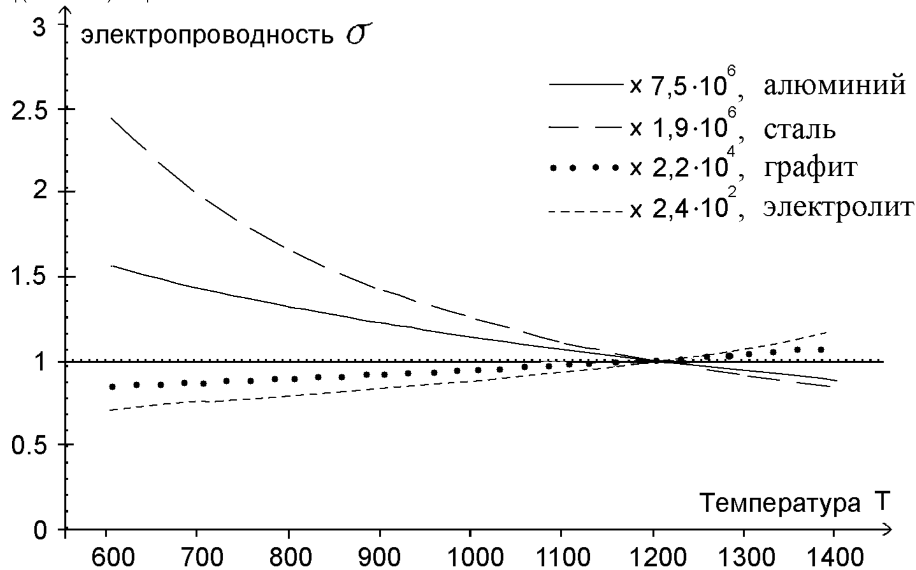


Рис 2. Электропроводность материалов

Все расчеты проводятся с точностью внутреннего итерационного процесса (отношение евклидовых норм невязок) $\varepsilon_i = 10^{-6}$, внешнего $\varepsilon_e = 10^{-4}$ и релаксационным параметром $\omega = 1$. Начальное приближение электрического потенциала $\varphi^0 = 0$, температуры $T^0 = 950$.

Пример 1. Рассматривается единичный куб, на гранях которого для потенциала и температуры ставятся краевые условия Дирихле. Правые части f_e и f_T подбираются таким образом, что аналитическим решением для потенциала и температуры является функция $T = \varphi = \sin \pi x \sin \pi y \sin \pi z$.

Коэффициент электропроводности предполагается слабо зависимым от температуры и задается на три порядка меньше, чем у графита: $\sigma_1(T) = \dfrac{1}{6}(1 - 0,00025(T - 293))^{-1}10^2$.

Коэффициент теплопроводности постоянный: $\lambda = 10$; начальные приближения: температуры 950, электрического потенциала 0; тест проводится на трех равномерных сетках: 1/16, 1/32, 1/64.

Пример 2. Исходные данные такие же, как в примере 1, за исключением того, что повышается нелинейность системы (7). Для этого увеличиваем в 1000 раз функцию электропроводности среды и задаем ее равной электропроводности графита: $\sigma_2(T) = 1000\sigma_1(T)$.

Так как задача (1)–(4) актуальна при моделировании алюминиевых электролизеров [6], то геометрию и физические параметры дальнейших примеров возьмем соответствующими расчетам в алюминиевых электролизерах [6].

Функции электропроводности материалов изображены на рис. 2.

Для следующих двух примеров расчетные области показаны на рис. 3.

Пример 3. Рассматривается область Ω, состоящая из трех параллелепипедов (рис. 3, *a*): одного внешнего Ω_1 и двух внутренних Ω_2 и Ω_3. Внешний $\Omega_1 = [0; 0,8] \times [0; 0,4] \times [0; 0,4]$ состоит из графита с коэффициентом теплопроводности $\lambda = 20$. Два внутренних параллелепипеда $\Omega_2 = [0,2; 0,3] \times [0,15; 0,25] \times [0; 0,4]$ и $\Omega_3 = [0,5; 0,6] \times [0,15; 0,25] \times [0; 0,4]$ состоят из стали с коэффициентом теплопроводности $\lambda = 40$.

На верхней грани задаем условие втекания тока силой 16 кА, на торцевых гранях внутренних параллелепипедов — условие вытекания тока силой 4 кА с каждой грани и на остальных границах с внешней средой — условие непротекания тока. На нижней грани задаем условие постоянной температуры $T = 300$ К, на остальных внешних гранях — условие невытекания тепла $\dfrac{\partial T}{\partial n} = 0$.

Тест проводится на трех равномерных сетках.

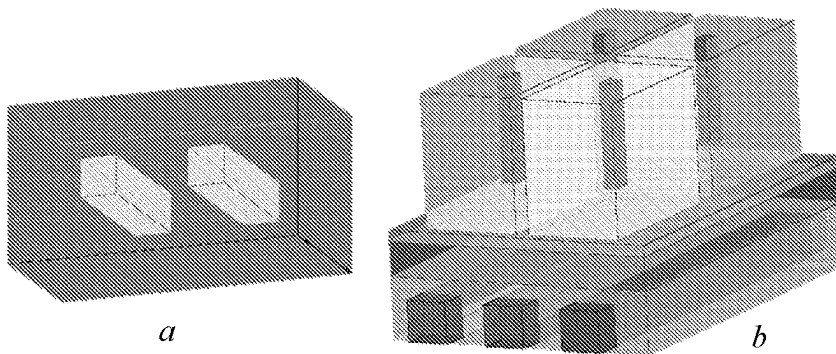


Рис 3. Расчетные области для примеров 3 и 4

В качестве следующего примера берем модель электролизера, рассчитанного пакетом программ БАЗИС–А [1].

Пример 4. Рассматривается область, состоящая из 14-ти параллелепипедов (рис. 3, b). Из-за сложности геометрии ее точные размеры приводить не будем.

Четыре вертикальных и три горизонтальных штыря состоят из стали с коэффициентом теплопроводности $\lambda = 40$. Нижний горизонтальной слой — графитсодержащая подина, $\lambda = 20$; второй горизонтальный слой — алюминий, $\lambda = 110$; третий — электролит, $\lambda = 2$. Четыре блока, находящиеся сверху электролита, состоят из графита, $\lambda = 20$.

На верхних гранях четырех вертикальных стержней задаем условие втекания тока силой 6 кА в каждую грань; с торцов трех горизонтальных стержней — условие вытекания тока силой 4 кА с каждой грани; на остальных внешних гранях — условие непротекания тока; на всей границе области задаем условие постоянной температуры, равной 300 К.

Результаты расчетов приведены ниже в виде таблиц. Через n_{out} обозначается число шагов внешнего итерационного процесса для достижения точности ε_e; $n_{\text{in}}^{\varphi}(n_{\text{in}}^{T})$ — суммарное число шагов внутренних итерационных процессов электростатической (тепловой) задачи для достижения точности ε_i.

Результаты расчетов первого примера приведены в табл. 1. По значениям δ_∞^φ и δ_∞^T можно судить о сходимости приближенного решения к точному с порядком h^2; сходимость температуры на сетках 1/16 и 1/32 имеет меньший порядок. Это объясняется тем, что начальное приближение для температуры на три порядка больше аналитического решения, а точность внутреннего итерационного процесса $\varepsilon_i = 10^{-6}$. Из таблицы видно, что точность уже достигута на сетке с шагом 1/16. Для увеличения точности на сетке 1/32 следует либо улучшить начальное приближение для температуры, либо увеличить внутреннюю итерационную точность.

В табл. 2 представлены результаты расчетов второго примера. По табличным значениям, как и в примере 1, можно судить о сходимости приближенного решения к точному с порядком h^2. Электропроводность среды в примере 2 в 1000 раз больше, чем в примере 1. Следствием этого является увеличение на три порядка погрешности правой части в уравнении теплопроводности (5) при том же аналитическом решении для φ и T. Этот факт дает увеличение ошибки решения δ_∞^T для температуры на порядки, что представлено в таблице.

Примеры 1, 2 продемонстрировали второй порядок сходимости к аналитическому решению, что соответствует теоретическим предпосылкам.

В табл. 3 и 4 показаны результаты расчетов примеров 3 и 4 со сложной геометрией и различными средами. Из табличных значений δ_∞^φ и δ_∞^T видна сходимость приближенного решения с порядком h.

Таблица 1

Результаты расчетов примера 1

Шаги сетки $h_x = h_y = h_z$	Число итераций			Погрешность решения	
	n_{out}	n_{in}^{φ}	n_{in}^{T}	δ_∞^φ	δ_∞^T
1/8	3	18	8	$1,30 \cdot 10^{-2}$	$4,63 \cdot 10^{-2}$
1/16	3	30	12	$3,22 \cdot 10^{-3}$	$1,16 \cdot 10^{-2}$
1/32	3	43	13	$8,05 \cdot 10^{-4}$	$3,13 \cdot 10^{-3}$
1/64	4	64	19	$2,02 \cdot 10^{-4}$	$1,43 \cdot 10^{-3}$

Таблица 2

Результаты расчетов примера 2

Шаги сетки $h_x = h_y = h_z$	Число итераций			Погрешность решения	
	n_{out}	n_{in}^{φ}	n_{in}^{T}	$\delta_{\infty}^{\varphi}$	δ_{∞}^{T}
1/8	4	24	16	$1,33 \cdot 10^{-2}$	2,15
1/16	4	37	23	$3,31 \cdot 10^{-3}$	$5,48 \cdot 10^{-1}$
1/32	4	58	33	$8,26 \cdot 10^{-4}$	$1,37 \cdot 10^{-1}$
1/64	4	85	45	$2,06 \cdot 10^{-4}$	$3,51 \cdot 10^{-2}$

Таблица 3

Результаты расчетов примера 3

Шаги сетки (h_x, h_y, h_z)	Число расчетных узлов	Число итераций			Погрешность решения	
		n_{out}	n_{in}^{φ}	n_{in}^{T}	$\delta_{\infty}^{\varphi}$	δ_{∞}^{T}
$(1/16, 1/4, 1/8)$	765	3	49	41	—	—
$(1/32, 1/8, 1/16)$	5049	5	83	106	0,71	$4,04 \cdot 10^{-2}$
$(1/64, 1/16, 1/32)$	36465	6	129	238	$7,88 \cdot 10^{-2}$	$2,32 \cdot 10^{-2}$
$(1/128, 1/32, 1/64)$	276705	6	215	512	$2,53 \cdot 10^{-2}$	$9,72 \cdot 10^{-3}$

Таблица 4

Результаты расчетов примера 4

Шаги сетки (h_x, h_y, h_z)	Число расчетных узлов	Число итераций			Погрешность решения	
		n_{out}	n_{in}^{φ}	n_{in}^{T}	$\delta_{\infty}^{\varphi}$	δ_{∞}^{T}
$(1/17, 1/32, 1/17)$	8634	4	105	48	—	—
$(1/34, 1/64, 1/34)$	62091	5	171	107	$6,11 \cdot 10^{-2}$	0,23
$(1/68, 1/128, 1/68)$	470037	6	311	221	$2,08 \cdot 10^{-2}$	0,11

Во всех примерах число внешних итераций n_{out} практически не увеличивается с дроблением сетки. Можно предположить что это связано с тем, что внешний итерационный процесс связывает два дифференциальных уравнения из (1). Следовательно, на него не должно влиять, на каких сетках они решаются. С другой стороны, число внешних итераций зависит от нелинейности коэффициента σ. Очевидно, что если $\sigma = \text{const}$, то $n_{\text{out}} = 1$. По значениям из таблиц видно, что число n_{out} больше в табл. 3 и 4, чем в табл. 1 и 2. Это подтверждает наше предположение о числе внешних итераций, так как в примерах 3 и 4 используются среды с различными по свойствам нелинейности коэффициентами σ.

Для примеров 3, 4 на рис. 4, 5 приведены изолинии скалярного поля электрического потенциала, а также изотермы теплового поля.

По изолиниям электростатического поля рис. 4 можно сказать что электрический ток втекает сверху и на других гранях не вытекает (изолинии перпендикулярны внешним граням), что соответствует граничным условиям из примера 3. По изотермам можно судить о распределении температуры в расчетной области. Температура максимальна посередине верхней грани. Это предсказуемо, так как на всех, кроме нижней, гранях задано условие непротекания тепла. При этом из-за протекания токов внутри всей области происходит выделение тепла. Выделившееся тепло выходит снизу, где задано условие охлаждения — минимальная температура в расчетной области.

По изолиниям и изотермам рис. 5 также можно говорить о правильности задания граничных условий в примере 4. Изолинии перпендикулярны границам (ток не вытекает), а для поля температур на границе области выполняется заданное условие постоянной температуры $T = 300$. Температура максимальна в верхней части вертикальных штырей. Это объясняется тем, что через верхние грани штырей втекают токи, а затем растекаются по геометрии. Плотность токов на верхних гранях штырей максимальна, а следовательно, максимально выделение тепла.

В заключение отметим, что важным критерием правильности расчетов является симметрия на приведенных рисунках.

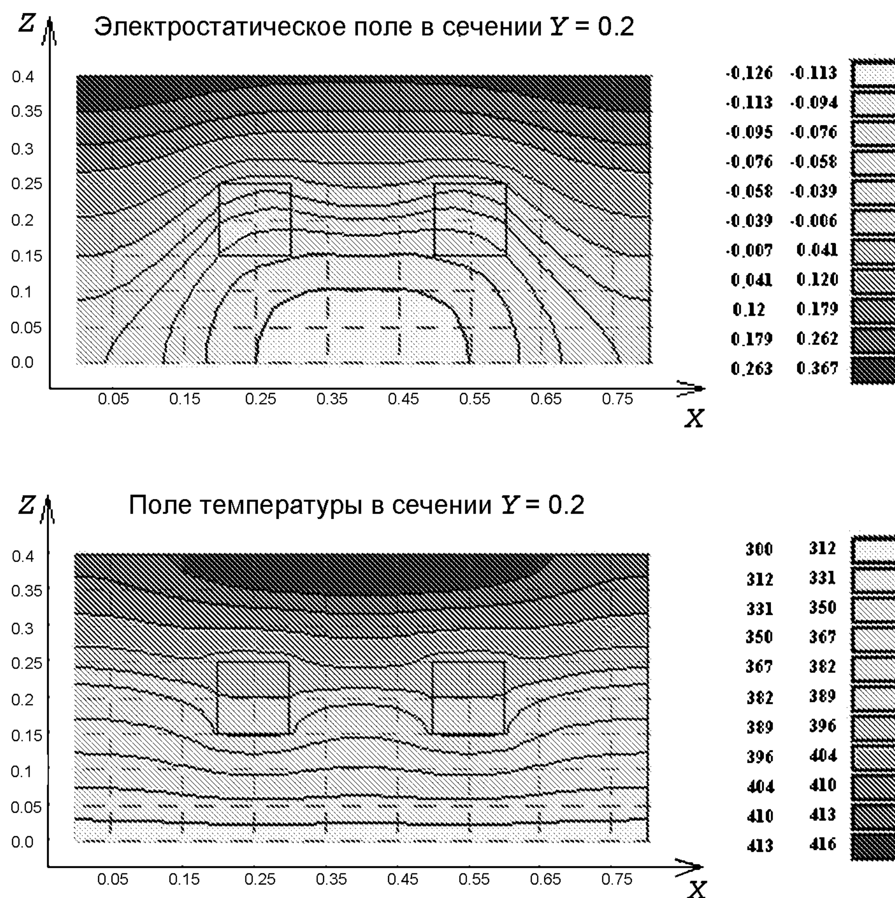
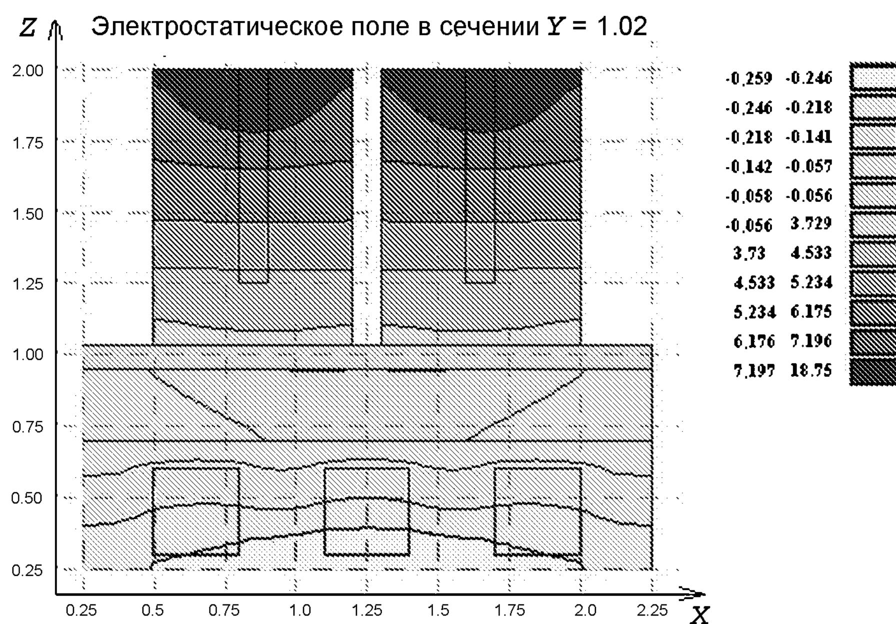


Рис 4. Изолинии электрического потенциала и изотермы теплового поля для примера 3



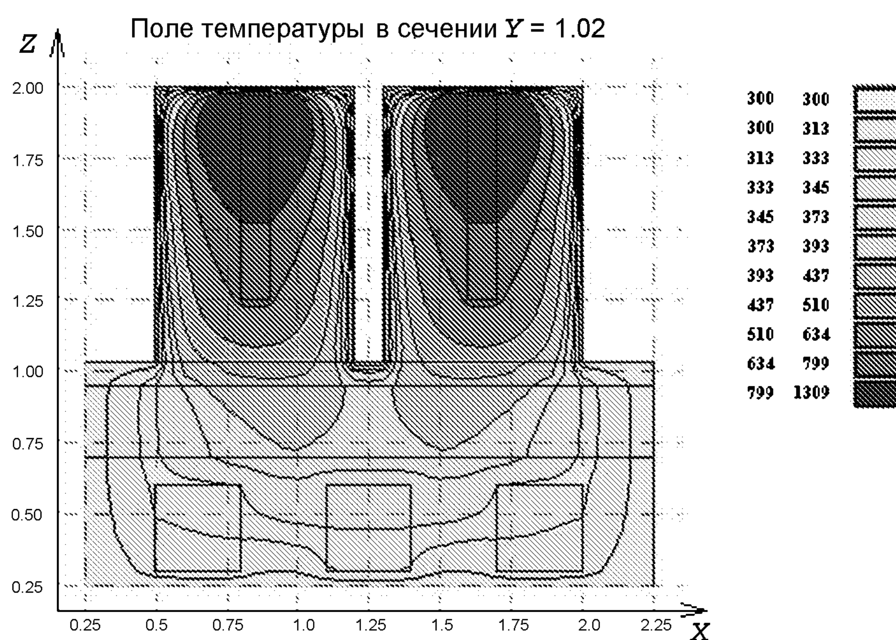


Рис 5. Изолинии электрического потенциала и изотермы теплового поля для примера 4

ЛИТЕРАТУРА

1. *Голосов И. С., Горбенко Н. И., Гурьева Я. Л., Ильин В. П., Колодяжный С. А., Лаевский Ю. М., Москалев А. В., Назаров О. Н., Подгорнова О. В., Попов В. Н., Соловьев С. А.* Пакет программ БАЗИС–А для моделирования технологических процессов в алюминиевом электролизере // Докл. Междунар. конф. «Алюминий Сибири–2002». Красноярск, 2002. С. 187–194.
2. *Scherbinin S. A., Pingin V. V., Polyakov P. V.* 3D thermo-elastic field modeling tool and its application for energy regime simulations in aluminium reduction cells // Light Metals, 2000. P. 323–329.
3. *Gurieva Y. L., Il'in V. P.* Program package for 3D boundary-value elliptic problem // Bull. NCC. Ser. Numer. Anal. 2002. N 11. P. 35–52.
4. *Ильин В. П.* Методы конечных разностей и конечных объемов для эллиптических уравнений. Новосибирск.: Изд-во Ин-та математики, 2000.
5. *Ильин В. П.* Методы неполной факторизации для решения алгебраических систем. М.: Наука, 1995.
6. *Минцис М. Я.* Распределение тока в алюминиевых электролизерах. Новокузнецк.: изд. СибГИУ, 2001.

Статья поступила 28 февраля 2003 г.

г. Новосибирск
Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН
E-mail: ssa@lapasrv.sscc.ru